

Examen - Analyse numérique

La clarté et la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Durée : 2h.

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Sans la calculer, montrer que A admet une décomposition LU .
2. Calculer la décomposition LU de A .
3. En utilisant la décomposition LU de A , résoudre le système $Ax = b$ avec $b = [1, 1, 1]^T$.
4. Calculer le rayon spectral de la matrice d'itération pour la méthode de Jacobi.
5. La méthode de Jacobi converge t-elle ?

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille $n \geq 1$ symétrique définie positive. On étudie sa décomposition de Choleski. Calculer les coefficients des facteurs de la décomposition en fonction des coefficients $a_{i,j}$ de A .

Exercice 3. On munit \mathbb{R}^n d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite, notée aussi $\|\cdot\|$. Pour une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $\text{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ le conditionnement de A .

1. Comparer d'une manière générale $\text{cond}(A^2)$ et $[\text{cond}(A)]^2$.
2. On suppose que \mathbb{R}^n est muni de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite, notée aussi $\|\cdot\|_2$. Soit alors $\text{cond}_2(A)$ le conditionnement d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Si de plus A est symétrique, montrer que $\text{cond}_2(A^2) = [\text{cond}_2(A)]^2$.

Exercice 4. Soit $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tridiagonale c'est-à-dire telle que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant $|i - j| \geq 2$, on a $a_{i,j} = 0$. On suppose que A admet une décomposition LU .

1. Montrer que les matrices L et U sont aussi tridiagonales.
2. Est-ce en accord avec l'exercice 1 ?